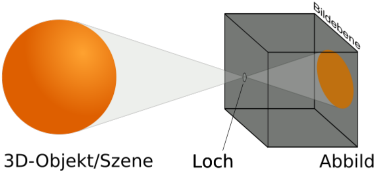
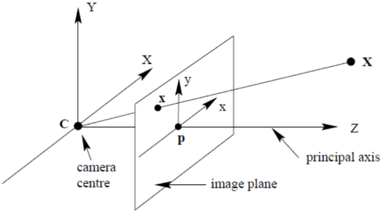
Bildverarbeitung: 3D-Geometrie





C – Projektionszentrum, Optische Achse, Bildebene,
P – Hauptpunkt (optische Achse kreuzt die Bildebene), x – Bildpunkt, X – Weltpunkt

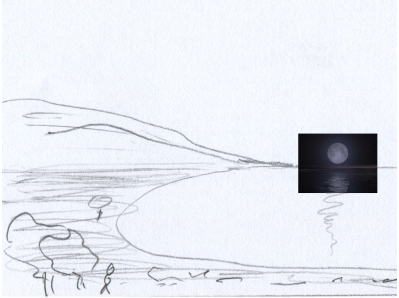
3D-Koordinatensystem: Ursprung im Kamerazentrum, Z-Achse – optische Achse

Weltpunkt $X = [X_1, X_2, Z]$
x ist ein Punkt im 3D, d.h. $x = [x_1, x_2, f]$ mit Brennweite f

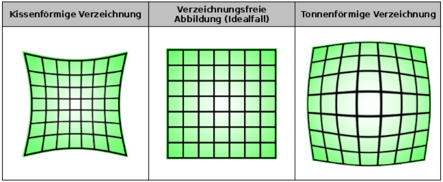
Projektive Abbildung:
$$x_1 = X_1 \cdot f/Z$$
$$x_2 = X_2 \cdot f/Z$$

Nicht eineindeutig – einem x entsprechen alle X, die auf dem Strahl $\lambda(x - C) = \lambda x$ liegen.

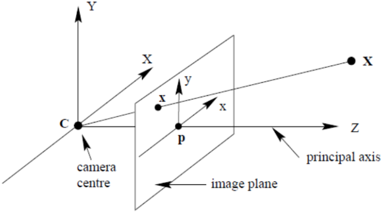
Zoom:



Radiale Verzerrung:



Homogene Koordinaten



Ein „Vektor“ $h \in \mathbb{R}^3$, d.h. $h = [h_1, h_2, h_3]$ beschreibt die Menge der Strahlen im $\mathbb{R}^3$ mit $X = \lambda \cdot [h_1/h_3, h_2/h_3, 1]$

Topologisch gesehen ist diese Menge zweidimensional – redundante Beschreibung.

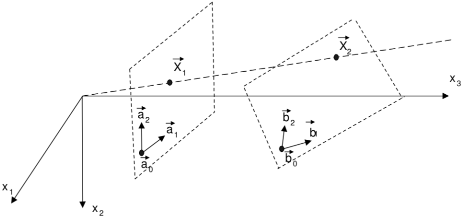
Die Menge der Weltpunkte im $\mathbb{R}^3$ wird auf Teilmengen partitioniert.
Zwei Punkte X und X' gehören einer Teilmenge (Äquivalenzklasse, Strahl), wenn $X_1/Z = X'_1/Z'$ und $X_2/Z = X'_2/Z'$

In homogenen Koordinaten gibt es keine projektive Abbildung mehr, denn X und x sind bereits in einer Äquivalenzklasse – ein Strahl.

Abbildung „Homogene Koordinaten → Bildkoordinaten“: $$\begin{aligned} x_1 &= h_1 \cdot f/h_3 \\ x_2 &= h_2 \cdot f/h_3 \end{aligned}$$

Homographie

Wie wird eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ auf eine andere Ebene im $\mathbb{R}^3$ (z.B. Bildschirm) Abgebildet?



Sei $[\lambda_1, \lambda_2]$ Koordinaten eines Punktes im Koordinatensystem der abzubildenden Ebene.

Die Lage der abzubildenden Ebene im $\mathbb{R}^3$ wird durch: $b_0 \in \mathbb{R}^3$ (ein Punkt in der Ebene) und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$ (Basis, der die Ebene aufspannt) angegeben.

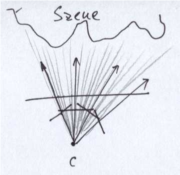
Die 3D-Punkte der Ebene sind somit $b_0 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$, d.h. $X = H \cdot [\lambda_1, \lambda_2, 1]$.

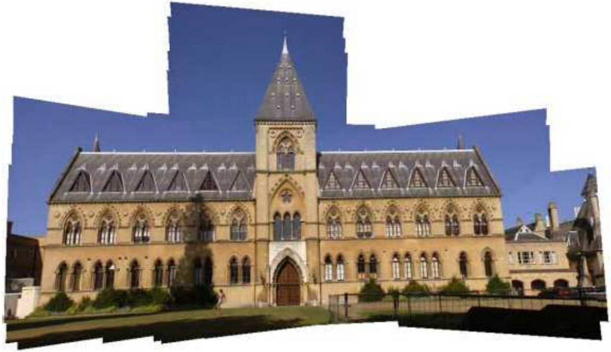
Das sind zugleich die homogenen Koordinaten.

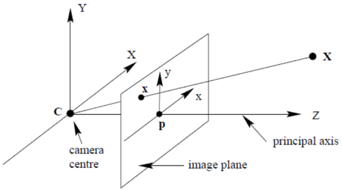
Homographie ist eine lineare Transformation in homogenen Koordinaten.

Homographie – Mosaik

Viele Ebenen (Bildschirme) werden auf eine abgebildet.







Kameraparameter (keine Verzerrung, quadratische Pixel):

– intrinsische Parameter – Brennweite f, Hauptpunkt $[P_x, P_y]$

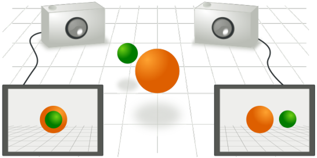
– extrinsische Parameter – Position des Kamerakoordinatensystem in der Welt (3 Winkel in Form der 3×3 Rotationsmatrix R und 3D-Verschiebung t)

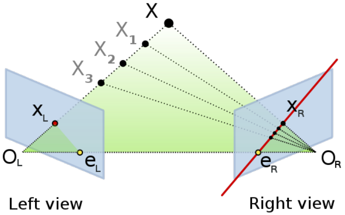
$$x = PX = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & P_x \\ 0 & f & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kamerakalibrierung:
Gegeben sei die Lernstichprobe $\big((X, x)\ldots\big)$, Gesucht werden die Kameraparameter.

Bestimmung der Lage eines Objektes:
Gegeben sind die Kameraparameter und Abbilder x, Gesucht werden die X.

Epipolargeometrie





Sei $t = O_l - O_r$ der Verschiebungsvektor.

$x_l + t$ liegt in der (grünen) Ebene π (Koordinatensystem der linken Kamera wird um t verschoben)

$(x_l + t) \times t = (x_l + t)[t]_\times$ steht senkrecht zur π ($[t]_\times$ ist der Kreuzprodukt in der Matrixform)

Derselbe Vektor in der Koordinatensystem der rechten Kamera ist $a = (x_l + t)[t]_\times R$

x_r liegt in π, d.h. $\langle a, x_r \rangle = 0$

Schließlich: $(x_l + t)[t]_\times R x_r = x_l [t]_\times R x_r + t[t]_\times R x_r = x_l [t]_\times R x_r = x_l E x_r = 0$
mit **Essential Matrix** $E = [t]_\times R$

Essential Matrix E
entspricht der Relation zwischen „metrischen“ Koordinatensystemen
(z-Achse stimmt mit der optischen Achse überein, alle Abstände sind in mm gemessen)

Fundamentalmatrix F
entspricht der Relation zwischen „Kamerakoordinatensystemen“
(z-Achse ist zu der optischen Achse parallel, alle Abstände sind in Pixeln gemessen)

Zusammenhang:
$E = K_l F K_r$ bzw. $F = K_l^{-1} E K_r^{-1}$ mit den **Kameramatrizen** K_l und K_r

$$K_{l|r} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & P_x \\ 0 & s_y & P_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

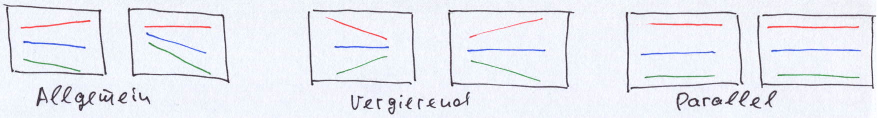
s_x und s_y sind Pixelgrößen, (P_x, P_y) ist der Hauptpunkt.

Zusammenfassend:

$$x_l F x_r = \begin{bmatrix} x_{l1} & x_{l2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

mit den homogenen Kamerakoordinaten x_l und x_r.

Epipolarlinien: Betrachtet man zu einem bestimmten x_l alle gültigen x_r, so gilt $x_l F x_r = \langle x_l F, x_r \rangle = 0$ (Liniengleichung im rechten Bild).

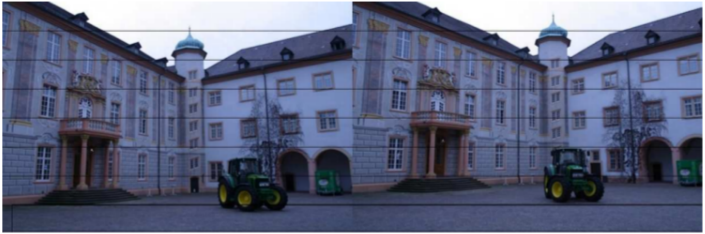


Wichtiger Spezialfall: parallele Anordnung – die Bilder sind **rektifiziert**:

- die optischen Achsen der Kameras sind zu einander parallel,
- senkrecht zur Linie, die Projektionszentren verbindet,
- die Bildschirme sind nicht „verdreht“

Rektifizierung

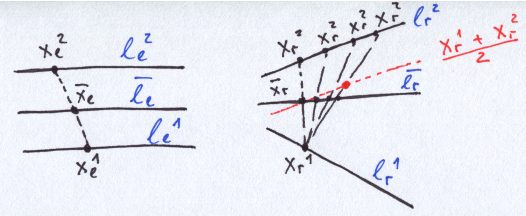
Auf beide Bilder werden Homographien angewendet so, dass die Bilder rektifiziert sind. Dafür ist das Wissen über die Szene nicht benötigt!!!



Die Menge **aller Punktepaare** (x_l, x_r) ist $\mathbb{R}^4$,
Die Menge **aller gültigen Korrespondenzpaare** (für die $x_l F x_r = 0$ gilt) ist dem 3D-Raum homeomorph, d.h. $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ die Bedingung $x_l F x_r = 0$ definiert eine 3D-Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^4$.

Frage: ist diese ein **affiner** Raum?
Ein Raum $\mathcal{R}$ heißt affin, wenn $x, y \in \mathcal{R} \Rightarrow \alpha x + (1-\alpha)y \in \mathcal{R}$
Antwort: **Nein** im Allgemeinen



Man betrachtet zwei „Punkte“ im $\mathbb{R}^4$ (zwei Korrespondenzpaare (x_l^1, x_r^1) und (x_l^2, x_r^2)), die der 3D-Untermannigfaltigkeit gehören, d.h. $x_l^1 F x_r^1 = 0$ und $x_l^2 F x_r^2 = 0$.

Man untersucht z.B. den „Mittelpunkt“ $(\bar{x}_l, \bar{x}_r) = 1/2\Big((x_l^1, x_r^1) + (x_l^2, x_r^2)\Big)$ und sieht, dass dieser nicht unbedingt die Bedingung der Epipolargeometrie erfüllt.

8-Punkte Algorithmus:

$$x_l F x_r = \begin{bmatrix} x_{l1} & x_{l2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r1} \\ x_{r2} \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

kann komponentenweise wie folgt umgeschrieben werden:

$$x_{l1}x_{r1} \cdot f_{11} + x_{l1}x_{r2} \cdot f_{12} + x_{l1} \cdot f_{13} + x_{l2}x_{r1} \cdot f_{21} + x_{l2}x_{r2} \cdot f_{22} + x_{l2} \cdot f_{23} + x_{r1} \cdot f_{31} + x_{r2} \cdot f_{32} + 1 = 0$$

(eine bezüglich f_{ij} lineare Gleichung mit 8 unbekannten).
$\Rightarrow$ 8 Gleichungen (8 bekannte Korrespondenzpaare) werden benötigt um F zu schätzen.
$\Rightarrow$ lineares Gleichungssystem mit 8 Variablen und 8 Gleichungen – relativ einfach zu lösen.

7-Punkte Algorithmus:
Die Elemente von F sind von einander nicht unabhängig!!!
– die Fundamentalmatrix hat immer den Rang $rang(F) = 2$

7 Korrespondenzpaare werden benötigt + die Einschränkung $det(F) = 0$
$\Rightarrow$ ein nicht lineares Gleichungssystem.

Schwieriger zu lösen $\leftrightarrow$ dafür aber in der Regel bessere Ergebnisse.